به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

فصل ششم-سری‌های عددی

در فصل اول داشتیم که یک عدد حقیقی $c_0.c_1c_2c_3\cdots$، در واقع جمع نامتناهی عدد به صورت
$$c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\frac{c_3}{10^3}+\cdots$$
است. در این کاربرگ به بررسی مفصل‌تر و دقیق‌تر سری‌های عددی می‌پردازیم.

تعریف ۱. فرض کنید $(a_j)_{i=k}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد، منظور از مجموع سری $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots$ که با $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ نیز نمایش داده می‌شود، حد دنباله زیر است:
$$a_k, a_k+a_{k+1}, a_k+a_{k+1}+a_{k+2}, \cdots, \sum_{j=k}^{n} a_j, \cdots.$$
دنباله بالا را دنباله مجموع‌های جزئی $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ می‌نامیم. اگر حد این دنباله وجود داشته باشد سری را همگرا و اگر وجود نداشته باشد سری را واگرا می‌گوییم.

گزاره ۲. فرض کنید سری‌های $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ و $\sum\limits_{j=k}^{\infty} b_j$ همگرا باشند و $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j=A$ و $\sum\limits_{j=k}^{\infty} b_j=B$. در این صورت

الف) اگر دنباله $(c_j)_{j=k}^{\infty}$ را به صورت $c_j=a_j+b_j$ تعریف کنیم، $\sum\limits_{j=k}^{\infty} c_j$ نیز همگراست و $\sum\limits_{j=k}^{\infty} c_j=A+B$.

ب) اگر r عددی مختلط باشد و دنباله $(d_j)_{j=k}^{\infty}$ را به صورت $d_j=ra_j$ تعریف کنیم، $\sum\limits_{j=k}^{\infty} d_j$ نیز همگراست و $\sum\limits_{j=k}^{\infty} d_j=rA$.

فعالیت ۱. فرض کنید a و r دو عدد مختلط باشند و $a\neq 0$. حد سری $\sum\limits_{j=0}^{\infty} ar^j$ را بدست آورید. به این سری، سری هندسی می‌گویند.

گزاره ۳. اگر سری اعداد مختلط $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ همگرا باشد، آنگاه $a_j\to 0$ وقتی $j\to+\infty$.

فعالیت ۲. گزاره ۳ را اثبات کنید.

۱ سری‌های عددی نامنفی

فعالیت ۳. سری همساز $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. اگر S_n مجموع جزئی n جمله اول این سری باشد، نشان دهید که $S_{2^k}\geq 1+\frac{k}{2}$؛ و از آن نتیجه بگیرید که سری همساز واگراست.

فعالیت ۴ (p-سری)**.** فرض کنید p عددی مثبت باشد. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را p-سری می‌نامند.

الف) همگرایی سری را وقتی $p \leq 1$ بررسی کنید.

ب) نشان دهید برای $p > 1$، $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^p} \leq \int_1^N x^{-p}dx$.

ج) با استفاده از قسمت (ب)، نتیجه بگیرید که p-سری برای $p > 1$ همگراست.

د) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^4}$ بررسی کنید.

در فعالیت ۴ از آزمون‌های زیر استفاده کرده‌ایم که صورت کلی آنها را می‌آوریم.

گزاره ۴ (آزمون کران‌بالایی)**.** فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد. در این صورت، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر دنباله مجموع‌های جزئی آن از بالا کران‌دار باشد. در این صورت، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ برابر است با کوچکترین کران بالایی مجموع‌های جزئی.

گزاره ۵ (آزمون مقایسه)**.** فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ و $(b_n)_{n=l}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشند، N ای وجود داشته باشد که $N \geq k$ و $N \geq l$ و به ازای $n \geq N$، $a_n \leq b_n$. در این صورت

الف) اگر $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

گزاره ۶ (آزمون انتگرال)**.** فرض کنید $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته، نزولی و نامنفی باشد و به ازای هر عدد صحیح $i \geq a$، $a_i = f(i)$. در این صورت $\sum a_i$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_a^{\infty} f$ همگرا باشد.

فعالیت ۵.

الف) گزاره ۴ را اثبات کنید.

ب) فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگراست.

ج) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ را بررسی کنید.

د) همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ را بررسی کنید.

ه) نشان دهید سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ برای هر x حقیقی و مثبت همگراست.

راهنمایی: این سری را با سری هندسی مقایسه کنید.

گزاره ۷ (آزمون مقایسه‌ای نسبت). $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ و $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ دو سری با جمله‌های حقیقی نامنفی‌اند و b_j ها همگی مخالف صفرند.

الف) فرض کنید عددی طبیعی مانند N و عددی حقیقی و مثبت مانند M وجود دارند که به ازای هر $j \geq N$، $\frac{a_j}{b_j} \leq M$. در این صورت، اگر $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ همگرا باشد، $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ نیز همگراست.

ب) فرض کنید عددی طبیعی مانند N و عددی حقیقی و مثبت مانند m وجود دارند که به ازای $j \geq N$، $\frac{a_j}{b_j} \geq m$. در این صورت، اگر $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ واگرا باشد، $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ نیز واگراست.

گزاره ۸ (آزمون حد نسبت). فرض کنید $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ و $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ دو سری با جمله‌های حقیقی و غیرمنفی‌اند، b_j ها مخالف صفرند و $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j}$ موجود و برابر با L است. در این صورت

الف) اگر $L < +\infty$ و $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ همگرا باشد، $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ نیز همگراست.

ب) اگر $0 < L \leq \infty$ و $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ واگرا باشد، $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ نیز واگراست.

فعالیت ۶.

الف) همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{10n^4 + 1}$ را بررسی کنید.

ب) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ را در نظر بگیرید که هر یک از a_n ها عدد حقیقی و دلخواه از بازه کران‌دار $[0, B]$ است. ثابت کنید که این سری همگراست.

گزاره ۹ (آزمون نسبت). فرض کنید $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ سری‌ای با جمله‌های مثبت باشد. در این صورت

الف) اگر عددی بین ۰ و ۱ مانند r و عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد که به ازای $n \geq N$، $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$، آنگاه $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد که به ازای $n \geq N$، $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$، آنگاه $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

گزاره ۱۰ (آزمون ریشه). فرض کنید $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ سری‌ای با جمله‌های نامنفی باشد. در این صورت

الف) اگر عددی بین ۰ و ۱ مانند r، و عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد که به ازای $n \geq N$، $\sqrt[n]{a_n} \leq r$، آنگاه $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب) اگر به ازای بی‌نهایت اندیس مانند n، $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$، آنگاه $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ واگراست.

فعالیت ۷. فرض کنید $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ دنباله‌ای نامنفی از اعداد حقیقی باشد که $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ موجود و برابر عددی مانند R باشد. با استفاده از گزاره ۱۰، نشان دهید که اگر $R < 1$ آنگاه سری همگرا و اگر $R > 1$ آنگاه سری واگراست.

۲ سری‌های عددی دلخواه

در این بخش سری‌های عددی در حالت کلی را بررسی می‌کنیم. در ابتدا گزاره زیر را ثابت می‌کنیم.

گزاره ۱۱. سری $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n$، که در آن $c_n = a_n + ib_n$، همگراست اگر و فقط اگر سری‌های $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n$ همگرا باشند. در این صورت، $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n + i\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n$.

قضیه زیر اهمیت همگرایی سری‌های با جمله‌های حقیقی نامنفی را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۲. فرض کنید $(c_n)_{n=k}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد. اگر $\sum\limits_{n=k}^{\infty}|c_n|$ همگرا باشد، $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n$ نیز همگراست.

فعالیت ۸. الف) قضیه ۱۲ را اثبات کنید.

ب) همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)^2}$ را بررسی کنید.

ج) نشان دهید سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ برای هر عدد حقیقی x همگراست.

د) فرض کنید $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد که $c_n \to c$. سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-c_n)^n}$ را در نظر بگیرید که در اینجا z عددی مختلط است. نشان دهید اگر $|z-c| > 1$ آنگاه این سری همگراست.

گزاره ۱۳ (آزمون لایب‌نیتس برای سری‌های متناوب). فرض کنید $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد که

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$$

و $a_n \to 0$ وقتی $n \to +\infty$. در این صورت، $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ که با آن سری متناوب می‌گویند، همگراست.

فعالیت ۹. در گزاره ۱۳، اگر S_n مجموع جزئی تا n جمله اول سری باشد، آنگاه

الف) نشان دهید که S_{2n} صعودی است و از بالا کران‌دار است.

ب) نشان دهید که S_{2n-1} نزولی است.

ج) کوچکترین کران بالای مجموع‌های جزئی زوج را S بنامید و نشان دهید که سری به مقدار S همگراست.
راهنمایی: $|S_{2n-1} - S| \leq |S_{2n-1} - S_{2n}| + |S_{2n} - S|$.

فعالیت ۱۰. سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید این سری همگرا است.

ب) نشان دهید مجموع جملات زوج این سری واگراست. همچنین مجموع جملات فرد آن نیز واگراست.

ج) نشان دهید حاصل این سری کوچکتر یا مساوی ۱ است.

د) نشان دهید می‌توان جملات این سری را با ترتیبی جدید طوری جمع کرد که حاصل سری جدید برابر با ۲ باشد.